2. Mehrdimensionale Analysis

2.1. Topologie im $\mathbb{R}^n$

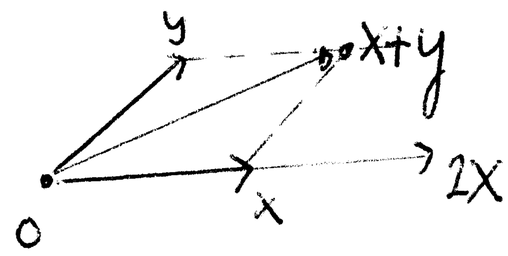
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

Die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ besitzen die Form $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Addition: $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

Skal. Mult: $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.



Kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots, e_n$ wobei $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$.

Hauptziel dieses Kapitels besteht darin, eine Differentialrechnung für Abbildungen $f: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n, m \geq 1)$ zu entwickeln, also für Abbildungen von n Variablen.

Beispiele von Abb. $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

1°) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. [$f(x,y)$ = Abstand von (x,y) zum $(0,0)$]

2°) $V:]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$, $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ [$V(r,h)$ = Volumen von]

3°) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, T = Temperatur. $(\underbrace{x, y, z}_{\text{Ortsvariablen}}, \underset{\text{Zeit}}{t}) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z,t) \mapsto T(x,y,z,t)$

4°) $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$. [Schraubenlinie:]

5°) $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ [$A(a_1,\dots,a_n)$ = arithmetisches Mittel von $a_1,\dots,a_n$]

$(a_1,\dots,a_n) \mapsto \frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n)$

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$.

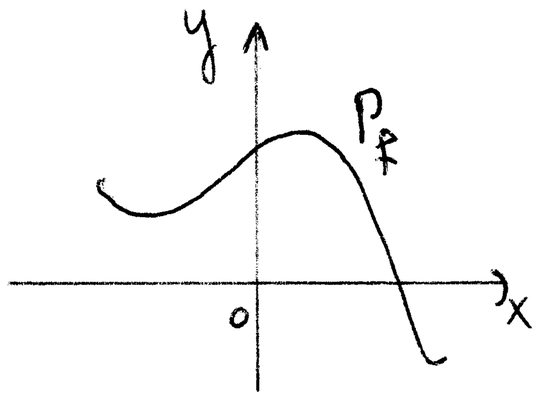
i) Der Graph von f wird definiert durch

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

ii) Das Bild von f wird definiert durch $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

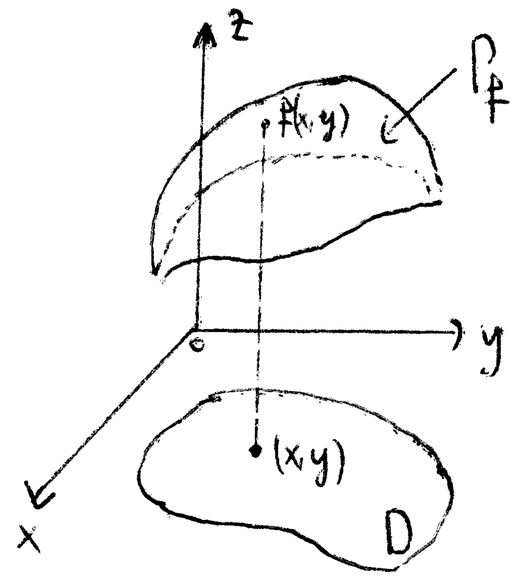
Beispiele:

$n = m = 1$:



$n = 2, m = 1$

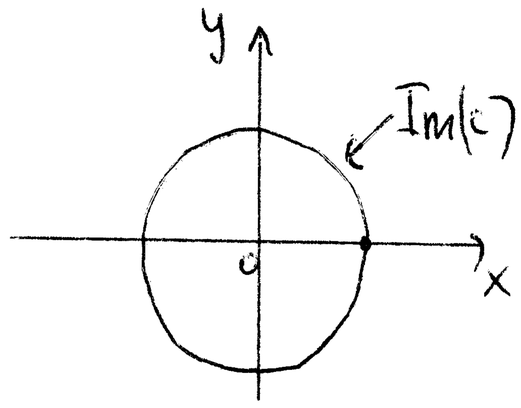
Γ_f = Fläche im Raum



$n = 1, m = 2$:

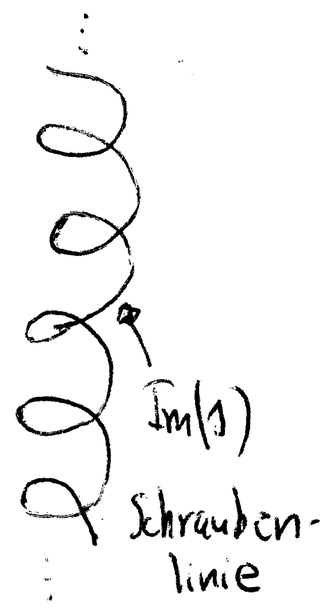
$c(t) = (\cos t, \sin t)$

$c: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$



$n = 1, m = 3$

$s(t) = (\cos t, \sin t, t)$

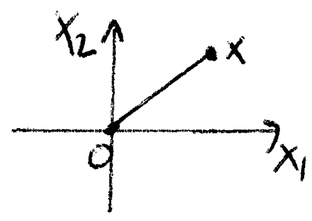


Def: (Norm, Betrag)

Sei $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ heißt Norm (Betrag) von x.

$\|x\|$ ist der Abstand von x zu $0 = (0,\dots,0)$.

$n = 2$:



Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ der Abstand von x zu y.

Bem: Für $n = 1$ gilt $\|x\| = |x|$.

Def: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Das (Standard)skalarprodukt von x, y wird definiert durch $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
Es gilt stets $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, und $\langle\, ,\, \rangle$ ist bilinear und symmetrisch.

Lemma 2.1.1 (Eigenschaften von $\|\ \|$ und $\langle\, ,\, \rangle$).
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

a) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

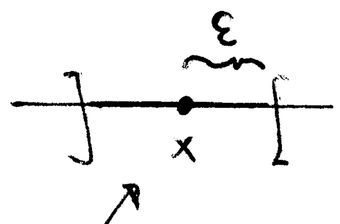
c) $|x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|$ d) $|\langle x, y\rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|$ e) $\|x+y\| \overset{\Delta}{\leq} \|x\| + \|y\|$.

Beweis: a), b), c) trivial. d) Siehe Übung.

e) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x+y, x+y\rangle$
$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$
$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \underset{\text{folgt unmittelbar aus d)}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|$. $\square$

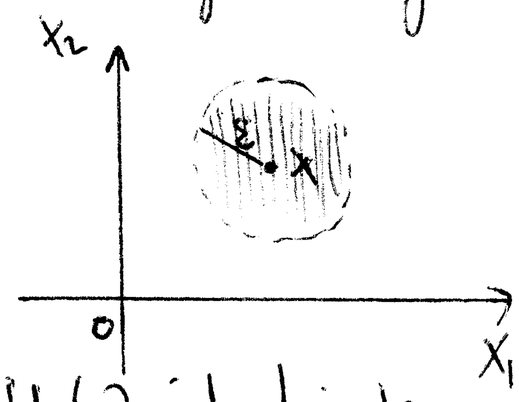
Def: (ε-Umgebung)
Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann wird definiert $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$.
$U_\varepsilon(x)$ heißt (offene) ε-Umgebung von x.

$n = 1$



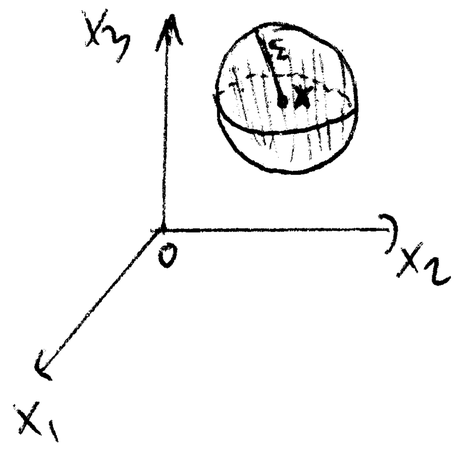
$U_\varepsilon(x)$ ist das offene Intervall mit Mittelpunkt x und Radius ε.

$n = 2$



$U_\varepsilon(x)$ ist die Kreisscheibe mit Mittelpunkt x und Radius ε. [Randkreis nicht drin]

$n = 3$:



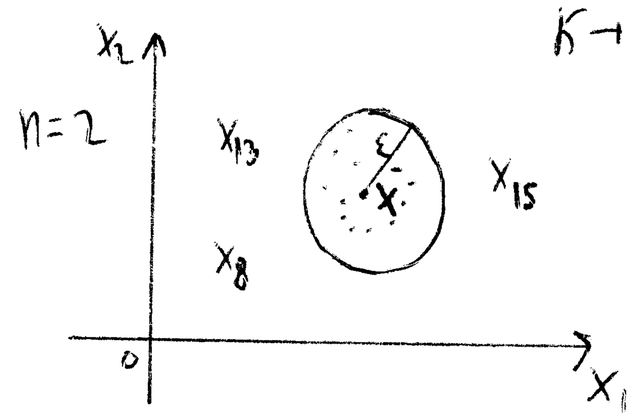
Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_k \in \mathbb{R}^n$, sei $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$.
Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Def: (x_k) konvergiert gegen x (oder $x_k \to x$ $(k\to\infty)$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$)

$$:\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0\ x_k \in U_\varepsilon(x).$$



Bem: Es lässt sich leicht zeigen (s. 2.1.1 c)), dass die Grenzwertbildung komponentenweise durchgeführt werden kann, d.h. es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \Longleftrightarrow \left(\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki}\right) = x_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Beispiel: Sei in $\mathbb{R}^2$ $x_n := \left(1 - \frac{1}{n+1}, \frac{\sin(n)}{n^2+1}\right)$. $x_n \to (1,0)$ $(n\to\infty)$.

Lemma 2.1.2: Seien (x_k), (y_k) konvergente Folgen im $\mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) $x_k + y_k \to x + y$ $(k\to\infty)$ ii) $\lambda x_k \to \lambda x$ $(k\to\infty)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der obigen Bem. + Satz 2.5 (Ana I).

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Die Menge D heißt

i) offen, falls $\forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$.

ii) abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen ist.

iii) beschränkt, falls $\exists M > 0$ mit $\|x\| \leq M$ $\forall x \in D$.

iv) Kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

36

b) i) $\mathring{D} := \{x \in D \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subseteq D\}$ heißt das Innere von D

ii) $\overline{D} := \mathbb{R}^n \setminus (\overset{\circ}{\mathbb{R}^n \setminus D})$ heißt der Abschluss von D

iii) $\partial D := \overline{D} \setminus \mathring{D}$ heißt der Rand von D.

<u>Lemma 2.1.3:</u> Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Dann

a) $U_\varepsilon(x)$ ist offen.

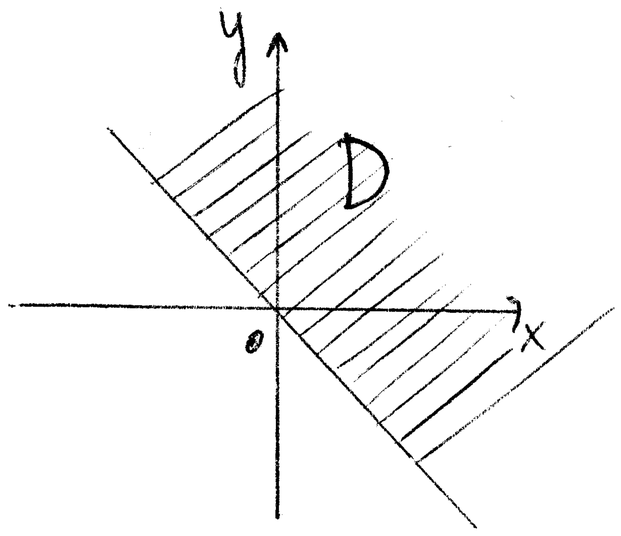
b) D ist offen $\Leftrightarrow \mathring{D} = D$. $\mathring{D}$ ist die größte offene Menge, die in D enthalten ist.

c) D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{D} = D$. $\overline{D}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die D enthält.

d) D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) aus D gilt:
$$\lim_{k \to \infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in D.$$

e) $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$.

<u>Beweis:</u> Siehe Üb.

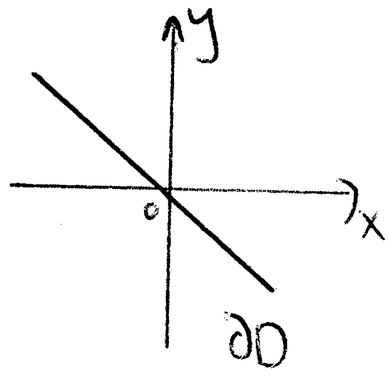


<u>Beispiele</u> 1) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$.

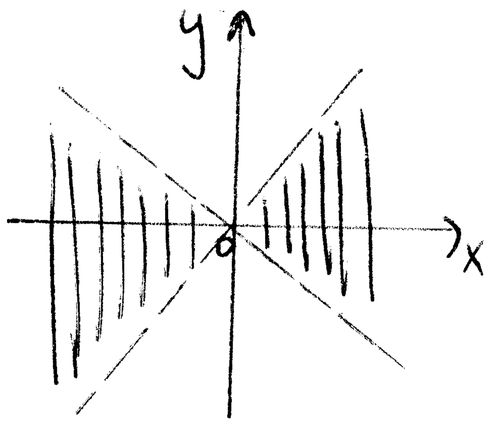
- D ist nicht offen $[(0,0) \in D$ und $U_\varepsilon((0,0)) \not\subseteq D \; \forall \varepsilon > 0]$
- D ist abgeschlossen denn $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ist offen [s. Bild]
- D ist nicht beschränkt denn $(x,0) \in D \; \forall x \geq 0$
- D ist nicht kompakt (denn nicht beschränkt)
- $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

- $\overline{D} = D$ $\left[\mathbb{R}^2 \setminus D \text{ offen} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^2 \setminus D}} = \mathbb{R}^2 \setminus D \Rightarrow \overline{D} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus D) = D \right]$

- $\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D} = D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$.



2) Sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.



$\left(\frac{1}{n+1}, 0\right) \in U \ \forall n \in \mathbb{N}$ aber

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1}, 0\right) = (0,0) \notin U$. Also ist U nicht abgeschlossen (s. 2.1.3 d))

<u>Satz 2.1.4</u> (ohne Beweis). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann:

K ist kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge (x_k) aus K besitzt eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in K$ konvergiert.

$\square$

2.2. Stetigkeit

<u>Def</u>: (Grenzwert)

Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (oder $f(x) \to b$ $(x \to a)$) <u>falls</u>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ sodass $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta$

$\left[\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ sodass } f(x) \in U_\varepsilon(b) \text{ für alle } x \in D \cap U_\delta(a) \right.$

$\left. \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ mit } f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(b). \right]$

Mithilfe von 2.1.1c) läßt es sich leicht zeigen:

Lemma 2.2.1: Seien f, a, b wie in der obigen Definition, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ und $b = (b_1, \dots, b_m)$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a} f_k(x) = b_k \text{ für } k = 1, 2, \dots, m.$$

Lemma 2.2.2: Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Falls $\lim_{x \to a} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a} g(x) = c$, dann $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$.

b) Falls $\lim_{x \to a} f(x) = b$, dann $\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda b$.

Beweis: Dies wird wie Satz 5.3 (Ana I) bewiesen.

Bem: fg ist i. A. nicht definiert (keine Multiplikation in $\mathbb{R}^m$ für $m \geq 2$).

Satz 2.3.3: (Substitution)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ und $g: E \to \mathbb{R}^p$ mit $f(D) \subseteq E$.

$\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \overset{\mathbb{R}^m}{E} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$. Sei $a \in \overline{D}$.

Ang. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ und $\lim_{y \to b} g(y) = c$. [Beachte: $b \in \overline{E}$]

Dann gilt $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

- $\lim_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ mit $g(E \cap U_{\delta_1}(b)) \subseteq U_\varepsilon(c)$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $f(D \cap U_\delta(a)) \subseteq U_{\delta_1}(b)$. Daraus

folgt $(g\circ f)(U_\delta(a)\cap D) = g(f(U_\delta(a)\cap D)) \subseteq g(E \cap U_{\delta_1}(b)) \subseteq U_\varepsilon(c)$. $\square$

<u>Beispiel</u>: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

Wir betrachten $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.
$(x,y) \longmapsto x^2+y^2 \qquad z \longmapsto \frac{\sin z}{z}$

$\left[(g\circ f)(x,y) = g(x^2+y^2) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{2.11.c)}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 0$ und $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} 1$.

Aus 2.2.3 folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

<u>Satz 2.2.4</u>: (Folgenkriterium)

Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in \bar{D}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) aus D mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

<u>Beweis</u>: Dies wird wie Satz 5.5 (Ana I) bewiesen. $\square$

<u>Beispiele</u>: 1) $f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$. $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$
$(x,y) \longmapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

- Sei $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $(x_n,y_n) \to (0,0)$ und $f(x_n,y_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0.$

- Sei $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to (0,0)$ und $f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) =$

$\frac{1/n^2 \cdot 1/n^2}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \neq 0 \overset{2.2.4}{\Longrightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

2) Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

Grenzwert im $(0,0)$? Es gilt $0 \leq |f(x,y)| = |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|$

$\forall (x,y) \neq (0,0) \underset{\text{Sandw.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

<u>Def:</u> (Stetigkeit)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in D$.

- f heißt stetig in a falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

[$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $f(D \cap U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.]

- f heißt stetig falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

<u>Lemma 2.2.5:</u> Seien f, a wie in der obigen Def, und $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Dann:

a) f ist stetig in a $\Leftrightarrow$ alle f_k $(k=1,\dots,m)$ stetig in a sind.

b) f ist stetig $\Leftrightarrow$ alle f_k $(k=1,\dots,m)$ stetig sind.

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus der Def. und 2.2.1 $\square$

<u>Lemma 2.2.6:</u> Folgende Funktionen sind stetig:

a) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Konst.}} \mathbb{R}^m$, $x \mapsto b$

b) $Ad: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$

c) $Mult: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$

d) $Quot: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x/y$

e) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Koordinaten-Funktion}} \mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i$

f) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.

<u>Beweis:</u> a) Trivial. b) Sei $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$. $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} Ad(x,y) \overset{2.1.1(c)}{=} \lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} (x+y) \overset{\text{Ana I}}{=} a_1+a_2 = Ad(a_1,a_2)$.

c), d), e): Analog zu b).

f) Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\big|\|x\|-\|a\|\big| \overset{\Delta}{\leq} \|x-a\| \Rightarrow$ $\big|\|x\|-\|a\|\big| < \varepsilon$ für $\|x-a\| < \delta := \varepsilon$. Also ist $\|\ \|$ in a stetig. $\square$

<u>Satz 2.2.7:</u> (Komposition)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: D \to \mathbb{R}^m$, $g: E \to \mathbb{R}^p$ mit $f(D) \subseteq E$.

$\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap\!\shortmid}{E}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$. Sei $a \in D$. Dann:

i) (f stetig in a und g stetig in $f(a)$) $\Rightarrow$ $g \circ f$ stetig in a.

ii) f, g stetig $\Rightarrow$ $g \circ f$ stetig.

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus dem Satz 2.2.3.

<u>Korollar 2.2.8:</u> Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$, $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Sind f, g stetig in a, dann auch $f+g$, λf, fg und f/g (wenn $g(a) \neq 0$).

b) Sind f, g stetig, dann auch $f+g$, λf, fg und f/g (wenn $g \neq 0$).

<u>Beweis:</u> a) Sei $D \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$. Nach 2.2.5 ist h stetig in a.

Nach 2.2.7 ist $f+g = Ad \circ h$ stetig in a. $\left[\begin{array}{l} D \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Ad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \\ \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \end{array} \right]$

Analog für λf, fg, f/g.

b) Folgt unmittelbar aus a). $\square$

<u>Beispiele:</u> 1) Reelle Polynome in n Variablen der Form

$$p(x) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_n \leq r}} \underbrace{c_{k_1, \dots, k_n}}_{\in \mathbb{R}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \quad (r \in \mathbb{N})$$

sind stetige Funktionen:

[Konstanten und Koordinatenfunktionen sind stetig und wiederholte Anwendung von 2.2.8].

2) $f(x,y) := \dfrac{e^x + 4yx}{5 + \sin(2y)}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Es reicht z.z, dass $f_1(x,y) := e^x$, $f_2(x,y) := 4yx$, $f_3(x,y) := 5$ und $f_4(x,y) := \sin(2y)$ stetig sind. Zu f_4: f_4 ist die Komposition von den 3 folgenden stetigen Funktionen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$.

$(x,y) \longmapsto y \qquad z \longmapsto 2z$

Satz 2.2.9: (Folgenkriterium)

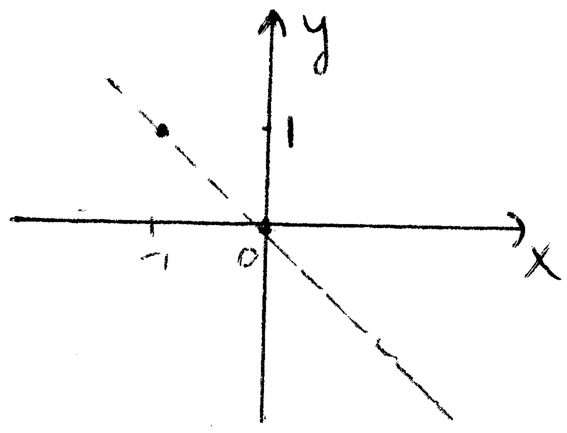
Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in D$. Dann:

f ist stetig in $a \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) aus D gilt:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem Satz 2.2.4. $\square$

Beispiele: 1) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \pi & \text{für } x+y>0 \\ 0 & \text{für } x+y \leq 0. \end{cases}$



Ist f stetig in $(-1,1)$? $f(-1,1) = 0$.

Sei $(x_n, y_n) := (-1+\frac{1}{n}, 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1+\frac{1}{n}, 1) = (-1,1)$ aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) =$
$\lim_{n\to\infty} f(-1+\frac{1}{n}, 1) = \lim_{n\to\infty} \pi = \pi \neq 0 = f(-1,1)$. f nicht stetig in $(-1,1)$.

2) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ist f stetig in $(0,0)$? $f(0,0) = 0$ und $0 \leq |f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$
$\forall (x,y) \neq (0,0)$. Sandwich-Lemma $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow$
f ist stetig in $(0,0)$.

Mithilfe vom Satz 2.1.4. und wie im Satz 5.15 (Ana I) läßt sich zeigen:

Satz 2.2.10: Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f (auf K) ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists c, d \in K$ mit $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ $\forall x \in K$.

$\square$

Satz 2.2.11: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

a) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $[f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in U\}]$

b) $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

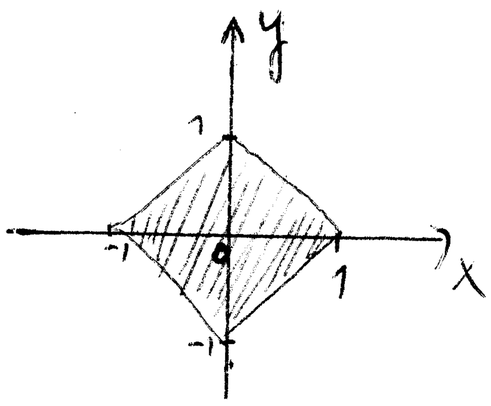
Beweis: a) Sei $x \in f^{-1}(U)$. $f(x) \in U$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$.
f stetig in $x \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Also $f(U_\delta(x)) \subseteq U$ und $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$. D.h., $f^{-1}(U)$ ist offen.

b) Z.z.: $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)$ ist offen.
$A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus A$ offen $\overset{a)}{\Rightarrow} f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ offen $\Rightarrow$
$\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ ist offen.

$\square$

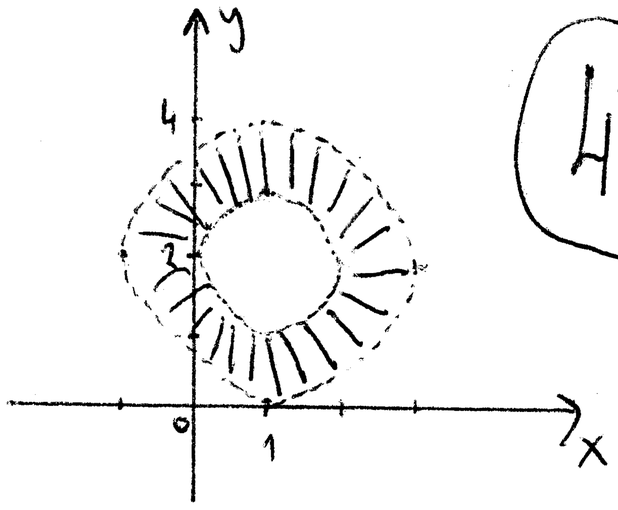
Beispiele:

1) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ist abgeschlossen.



Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := |x| + |y|$.
f ist stetig (Zusammensetzung von stetigen Funktionen).
2.2.11 $\Rightarrow A = f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}})$ ist abgeschlossen.

2) $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4\}$ ist offen.



Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$.

f ist stetig (Polynom). 2.2.11 $\Rightarrow U = f^{-1}(\overbrace{]1,4[}^{\text{offen in } \mathbb{R}})$ ist offen.

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $x \in D$.

a) f hat ein lokales Maximum bei x wenn $\exists \delta > 0$ mit $f(y) \leq f(x)$ $\forall y \in U_\delta(x) \cap D$.

b) f hat ein globales Maximum bei x wenn $f(y) \leq f(x)$ $\forall y \in D$.

c) Analog für lokales und globales Minimum.

d) f hat ein lokales Extremum bei x wenn f ein lokales Maximum oder Minimum bei x hat.

e) Analog für globales Extremum.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2x + 8 + y^2 - 5$.

$f(x,y) = (x+1)^2 + 7 + y^2 - 5 = (x+1)^2 + y^2 + 2 \geq 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

quadrat. Ergänzung

- $f(-1,0) = 2 \Rightarrow (-1,0)$ ist ein globales Min. von f.
- f hat kein globales Maximum denn $f(x,0) = x^2 + 2x + 8 \to \infty$ für $x \to \infty$.
- Es lässt sich leicht zeigen, dass $(-1,0)$ das einzige lokales Extremum von f ist.

Bem: Für eine gegebene Funktion $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ kann man meistens nicht raten, ob f lokale Extrema besitzt. Dazu braucht man im Allgemeinen die sogenannten partiellen Ableitungen.